2 monete

$m_1 \longrightarrow$ dà Teste con prob. $\frac{1}{2}$

$m_2 \longrightarrow$ " " " " $\frac{1}{3}$

Si lancia m_1 finché non esce teste per la 1ª volta. A questo punto si cambia moneta e si lancia m_2 finché non esce testa per la 1ª v.

T_1 = n° di lanci necessari per ottenere testa con la 1ª moneta m_1

T_2 = n° di l. .... 2ª moneta m_2

(a) Calc. la legge di T_1 e la legge di T_2.

(b) Calc. la prob. che l'esperimento termini dopo esattamente 3 lanci

(c) Calc. la prob. che l'esper. termini dopo almeno 3 lanci

ott 24-13:52

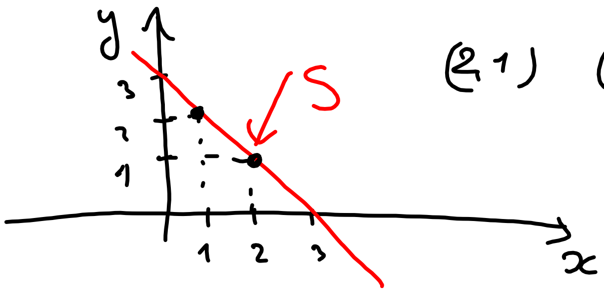
(a) $T_1 \sim$ geometrica di par $p_1 = \frac{1}{2}$

$T_2 \sim$ " " " $p_2 = \frac{1}{3}$

(b) $P(\{T_1 + T_2 = 3\}) = P((T_1, T_2) \in S)$

(T_1, T_2)

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 3\}$$



$(2,1)$ $(1,2)$

$$P(T_1 + T_2 = 3) = P((T_1, T_2) \in S) =$$

$$\to \sum_{(x,y)\in S} p(x,y)$$

$$p(x,y) = P(T_1 = x, T_2 = y) = P(T_1 = x) \cdot P(T_2 = y)$$

$$P(\underbrace{T_1+T_2=3}) = {\sum_{(x,y)\in S}}' p(x,y) =$$

$$= p(1,2)+p(2,1) = \underline{P(T_1=1,\ T_2=2)} +$$

$$+ \underline{P(T_1=2,\ T_2=1)} = P(T_1=1)\cdot P(T_2=2) +$$

$$+ P(T_1=2)\,P(T_2=1) =$$

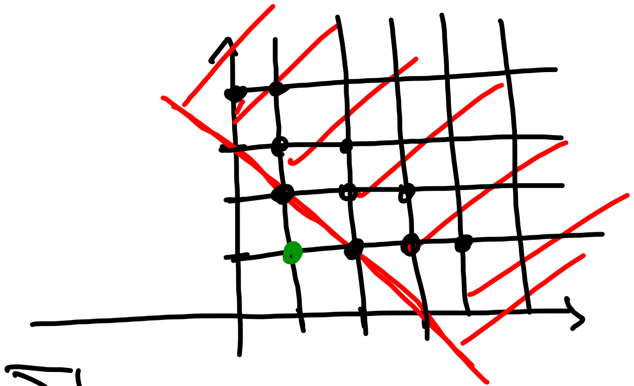
$$P(T=k) = p(1-p)^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)^{1-1}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{2-1} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{2-1}\cdot\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{1-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$$

(c) $P(T_1+T_2 \geq 3) = P((T_1,T_2) \in S)$

$S = \{(x,y) : x+y \geq 3\}$



$$= \sum_{(x,y)\in S} p(x,y)$$

$$\{T_1+T_2 \geq 3\}^c = \{T_1+T_2 < 3\} =$$

$$= \{T_1+T_2 \leq 2\} = \{T_1=1, T_2=1\}$$

$$P(T_1=1, T_2=1) = P(T_1=1)P(T_2=1)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} \longrightarrow \left(1-\frac{1}{6} = \frac{5}{6}\right)$$

ott 24-14:32

$$P(T_1+T_2\geq 3) = P\left(\bigcup_{k=3}^{\infty}\{T_1+T_2=k\}\right)$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} \underbrace{P(T_1+T_2=k)}$$

$$P(T_1+T_2=k) = P\left(\bigcup_{i=0}^{\infty}\{T_1=i,\ T_2=k-i\}\right)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(T_1=i,\ T_2=k-i) = \quad i=3 \quad i=4$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P(T_1=i)\,P(T_2=k-i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{k-i-1}$$

ott 24-14:38

k fissato

$i = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$

$k = 5$

$K - i = 1, 2, 3 \ldots$

$5 - i = 1, 2, 3 \ldots$

$i = 1, 2, 3, 4, \cancel{5}$

$$\sum_{i=0}^{N} x^i = \frac{1 - x^{N+1}}{1 - x} \qquad x \neq 1$$

$$= \sum_{i=1}^{K-1} P(T_1 = i)\, P(T_2 = k - i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-i} =$$

$$P(T_1+T_2 \geq 3) =$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} P(T_1+T_2=k) = \cancel{\sum_{k=3}^{\infty}}$$

$$= \sum_{k=3}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-i-1} \right)$$

Siano X e Y 2 v. a. a valori interi aventi dens. congiunta $p(x,y)$

Allora la v. a. $Z = X+Y$ ha densità data dalla formula

$$P(Z=z) = \sum_x p(x, z-x) =$$

$$= \sum_x P(X=x, Y=z-x) \overset{\text{se ind}}{=}$$

i k i

$$= \sum_x P(X=x)\, P(Y=z-x)$$

ott 24-14:49

Siano X, Y, Z 3 v. a. discrete

aventi dens. cong.

$$p(x,y,z) = \begin{cases} 1/4 & \text{se } (x,y,z) \in E \\ 0 & \text{altrim.} \end{cases}$$

dove $E = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)\}$

$P(X=1, Y=0, Z=0) = \frac{1}{4}$

$P(X=2, Y=0, Z=0) = 0$

Calcolare

ott 24-14:54

X, Y e Z

$\forall (x, y, z)$

$$0 = p(x, y, z) = P(X = x, Y = y, Z = z) \overset{?}{\cancel{=}}$$

$$p_X(x) \cdot p_Y(y) \cdot p_Z(z) = \frac{1}{8} \qquad p_X(0) = P(X = 0) = \frac{1}{2}$$

$\longrightarrow x = 0, \; y = 0, \; z = 0$

$$P(X=0) = p_X(0) = \sum_{y,z}^{1} \underline{\underline{p(0,y,z)}} =$$

$$= p(0,1,0) + p(0,0,1) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2}$$

- $X \sim B(1, \frac{1}{2})$
- $Y \sim B(1, \frac{1}{2})$
- $Z \sim B(1, \frac{1}{2})$

$$P(X=x, Y=y) \overset{?}{=} P(X=x)P(Y=y)$$

$$\begin{cases} P(X=1, Y=1) = \frac{1}{4} \\ P(X=1)\,P(Y=1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

X e Y sono indipendenti.

ott 24-15:11

$X+Y$ e Z sono indipendenti?

$\underline{X+Y} \sim ?$

$\left.\begin{aligned} &\cdot X \sim B(1, \tfrac{1}{2}) \\ &\cdot Y \sim B(1, \tfrac{1}{2}) \end{aligned}\right\}$ ind.

$Z \sim B(1, \tfrac{1}{2})$

$U = X+Y \sim B(2, \tfrac{1}{2})$

$$\boxed{\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} &X \sim B(m, p) \\ &Y \sim B(n, p) \end{aligned}\right\} \text{ indip.} \\ &\Longrightarrow X+Y \sim B(m+n, p) \end{aligned}}$$

$$\rightarrow P(U=0, Z=0) = p_{U,Z}(0,0)$$

$$p_U(0)\cdot p_Z(0) = P(U=0)\cdot P(Z=0)$$

$$U \rightarrow \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases} \qquad Z \rightarrow \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \underline{(0,0)}\ \underset{\times}{(0,1)}\ \underline{(1,0)}\ \underset{\times}{(1,1)}\ \underline{(2,0)},\ \underset{\times}{(2,1)}$$

$$P(U=0, Z=0) = P(X+Y=0, Z=0)$$

$$= P(X=0, Y=0, Z=0) =$$

$$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= p(0,0,0) = 0$$

$$P(U=0)\cdot P(Z=0) = \binom{2}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^0\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2}$$

ott 24-15:22

Si lancia un dado equilibrato 3 volte

$$U_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima faccia non compare mai nei 3 lanci} \\ 0 & \text{---} \end{cases}$$

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ $(5, 2, 2)$

$U_1 = 1$ $U_2 = 0$

(a) Calc. la dens. di U_i $\forall i$

(b) Calc. la dens. di $V = U_1 \cdot U_2$

(c) U_1 e U_2 sono indipendenti?

(d) Posto $X = n^\circ$ di facce che non compaiono mai nel corso dei 3 lanci

Calc. $E[X]$ $5, 2, 2$ $X=4$

ott 24-15:28

(a) Legge di U_1

$$U_1 = \begin{cases} 1 & \text{se la faccia 1 non compare mai nei 3 l} \\ 0 & \text{—} \end{cases}$$

$U_1 \sim B(1, ?)$

$p = P(U_1 = 1) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = (5/6)^3$

ind
$A_1 = \{$ la faccia 1 non compare nel 1° l $\}$ $P(A_1) = 5/6$

$A_2 = \{$ la faccia 1 non compare nel 2° l $\}$

$A_3 = \{$ la faccia 1 non compare nel 3° l $\}$

$$U_i \sim B\left(1, \left(\frac{5}{6}\right)^3\right) \quad \forall i = 1, \dots 6$$

$$V = U_1 U_2 = \begin{cases} 1 & \text{se le facce 1 e 2 non compaiono nei 3 lanci} \\ 0 & \text{---} \end{cases}$$

$$V \sim B\left(1, \left(\frac{4}{6}\right)^3\right)$$

$$U_1 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \qquad U_2 = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

$$P(V=1) = \left(\frac{4}{6}\right)^3$$

$$P(U_1 = 1, U_2 = 1) = P(V=1) = \left(\frac{4}{6}\right)^3$$

$$P(U_1=1)\, P(U_2=1) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

U_1 e U_2 <u>non</u> sono indip.

ott 24-15:45

(a) dens. cong. di (X,Y)

(b) densità marg. di X, Y e Z

(c) X e Y sono indipendenti?

(d) X, Y, Z sono indipendenti?

(e) ~~sono~~ $X+Y$ e Z sono indipendenti?

ott 24-14:57

$$X = \sum_{i=1}^{6} U_i \sim \text{?} \quad \cancel{B\left(6, \left(\tfrac{5}{6}\right)^3\right)}$$

no!

$$\underline{U_i \sim B\left(1, \left(\tfrac{5}{6}\right)^3\right)}$$

$$E[X] = \sum_{i=1}^{6} E[U_i] = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 6 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^3$$

$$P((X,Y)=(1,0)) =$$

$$P(X=1, Y=0) = \underbrace{P(X=1, Y=0, Z=0)}_{=\frac{1}{4}}$$

$$p_{(X,Y)}(x,y) = \sum_z p(x,y,z)$$

$x=1,\ y=0$

$$p_{(X,Y)}(1,0) = \sum_z p(1,0,z) = p(1,0,0) = \frac{1}{4}$$

$$p_{(X,Y)}(0,1) = p(0,1,0) = \frac{1}{4}$$

$$p_{(X,Y)}(0,0) = p(0,0,1) = \frac{1}{4}$$

$$p_{(X,Y)}(1,1) = p(1,1,1) = \frac{1}{4}$$